Number Theory
Paris 1993-1994

Aspects expérimentaux de la conjecture abc

Abderrahmane Nitaj

1. - Introduction.

Si n est un entier non nul, le produit de ses différents facteurs premiers, noté $r(n)$, sera appelé radical de n (certains auteurs utilisent le terme support, conducteur ou noyau), avec par convention $r(1) = 1$. La conjecture abc de J. Oesterlé et D.W. Masser est liée à la notion de radical. Cette conjecture date de 1985 et est devenue maintenant classique.

Conjecture (abc). *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $c(\varepsilon) > 0$ telle que, pour tout triplet (a, b, c) d'entiers positifs vérifiant $a+b = c$ et $(a, b) = 1$ on ait:*

$$c \leq c(\varepsilon)\,(r(abc))^{1+\varepsilon},$$

où $r(abc)$ est le radical de abc.

La conjecture abc a des conséquences très étonnantes. Elle implique en particulier le théorème de Fermat asymptotique (i.e. vrai pour les grands exposants), le théorème de Faltings (née Conjecture de Mordell) et s'applique bien aux équations diophantiennes. On peut trouver certaines de ses applications dans [2, 3, 5, 6, 11, 12, 13,14,15,16, 17,19].

L'inégalité de la conjecture abc implique que, pour tout triplet d'entiers positifs (a, b, c), vérifiant $a + b = c$, $(a, b) = 1$ et $c \geq 3$, on a:

$$\frac{\log c}{\log r(abc)} \leq 1 + \varepsilon + \frac{\log c(\varepsilon)}{\log r(abc)} \leq 1 + \varepsilon + \frac{\log c(\varepsilon)}{\log 6}. \tag{1.1}$$

Ainsi, le rapport

$$\alpha = \alpha(a, b, c) = \frac{\log c}{\log r(abc)} \tag{1.2}$$

est borné. Elle implique de même que le rapport

$$\rho = \rho(a,b,c) = \frac{\log abc}{\log r(abc)} \tag{1.3}$$

est borné car $\alpha(a,b,c) \leq \rho(a,b,c) \leq 3\alpha(a,b,c)$. Expérimentalement, les plus grandes valeurs connues pour les rapports (1.2) et (1.3) proviennent respectivement d'un exemple de E. Reyssat (1987), et d'un exemple de l'auteur (1992):

$$\begin{cases} 2 + 3^{10}.109 = 23^5 & \alpha = 1,62991, \\ 13.19^6 + 2^{30}.5 = 3^{13}.11^2.31, & \rho = 4,41901. \end{cases} \tag{1.4}$$

Le meilleur résultat prouvé provient d'un travail de C.L. Stewart et K. Yu, qui ont établit le théorème suivant:

Théorème 1.5. *(Stewart-Yu) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $c_1(\varepsilon) > 0$ telle que, pour tout triplet (a,b,c) d'entiers positifs vérifiant $a+b = c$ et $(a,b) = 1$, on ait:*

$$\log c \leq c_1(\varepsilon)\,(r(abc))^{2/3+\varepsilon}.$$

L'inégalité de ce théorème est cependant assez loin de celle de la conjecture *abc*.

Dans la partie 2 de cet article, on étudie les deux rapports (1.2) et (1.3), et dans la partie 3, on décrit des algorithmes qui permettent de "tester" numériquement la conjecture *abc*. Ces résultats numériques nous permettront de proposer des conjectures plus faibles que la conjecture *abc*, mais dans lesquelles les constantes sont explicites.

2. - Etude des rapports (1.2) et (1.3).

Les inégalités (1.1) impliquent que les rapports (1.2) et (1.3) vérifient:

$$\limsup_{c\to\infty} \alpha(a,b,c) = 1, \qquad \limsup_{c\to\infty} \rho(a,b,c) = 3, \tag{2.1}$$

où les limites sont prises pour des triplets d'entiers positifs vérifiant $a+b = c$ et $(a,b) = 1$. En effet, le théorème de Mahler assure que

$$\lim_{c\to\infty} r(abc) = +\infty.$$

En particulier, les limites (2.1) montrent qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de triplets d'entiers positifs (a,b,c), vérifiant $a+b=c$, $(a,b)=1$ et admettant des rapports (1.2) ou (1.3) respectivement supérieurs à $1,62991$ ou à $4,41901$, et donc meilleurs que les exemples (1.4). D'autre part, indépendamment de la conjecture *abc*, nous démontrons la proposition suivante.

Proposition 2.2. *Pour tout réel $\alpha_0 > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de triplets (a,b,c) d'entiers positifs vérifiant $a+b=c$, $(a,b)=1$ et tels que $\alpha(a,b,c)=\alpha_0$.*

Preuve. Soient (x_i,y_i,z_i), $i=1,2$, deux triplets d'entiers positifs différents vérifiant pour $i=1,2$, $x_i+y_i=z_i$, $(x_i,y_i)=1$ et tels que $\alpha(x_i,y_i,z_i)=\alpha_0$. On pose $r_i=r(x_iy_iz_i)$, $i=1,2$.

Si $r_1=r_2$, alors $z_1=z_2$ et l'équation $x+y=z_1$ n'admet qu'un nombre fini de solutions telles que $r(xyz_1)=r_1$, où r_1 est fixé.

Supposons maintenant que $r_1\neq r_2$. Soit (x_3,y_3,z_3) un triplet d'entiers positifs vérifiant $x_3+y_3=z_3$, $(x_3,y_3)=1$ et tel que $\alpha(x_3,y_3,z_3)=\alpha_0$. Soit $r_3=r(x_3y_3z_3)$. Si $r_3=r_i$, $i=1,2$, alors $z_3=z_i$. Supposons donc que $r_3\neq r_i$, $i=1,2$. Ainsi

$$\frac{\log z_1}{\log r_1}=\frac{\log z_2}{\log r_2}=\frac{\log z_3}{\log r_3}=\alpha_0,$$

et α_0 n'est pas rationnel puisque $r(z_i)\neq r_i$, $i=1,2,3$, en excluant le triplet trivial $(1,1,2)$. Alors, le théorème de Lang (voir [20], p. 51) implique que $\log r_1$, $\log r_2$ et $\log r_3$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants. Soient a_i, $i=1,2,3$ trois entiers positifs non nuls tels que $(a_1,a_2,a_3)=1$ et $a_3\log r_3=a_1\log r_1+a_2\log r_2$. Ainsi $r_3^{a_3}=r_1^{a_1}r_2^{a_2}$ et r_i, $i=1,2,3$, est sans facteurs carrés. Si $(r_1,r_2)=1$ alors $a_3=a_1=a_2$ et donc $r_3=r_1r_2$. Si $(r_1,r_2)\neq 1$, alors $a_3=a_1+a_2$, $a_3=a_i$, avec $i=1$ ou $i=2$, et donc $r_3=r_2$ ou $r_3=r_1$, ce qui est impossible. Ainsi, pour α_0 donné, il n'existe au plus que trois familles, finies, de triplets (a,b,c) d'entiers tels que $\alpha(a,b,c)=\alpha_0$. Chaque famille est représentée par le même radical $r(abc)$. ■

Remarques.

1) Si la conjecture de Lang, appelée conjecture des quatre exponentielles (voir [20], p. 59) est vraie, on peut montrer que pour chaque réel α_0 il ne peut y avoir au plus qu'une seule famille, finie, de triplets (a,b,c) d'entiers, ayant le même radical et tels que $\alpha(a,b,c)=\alpha_0$.

2) Une famille de triplets intéressante est la suivante. Pour un entier $n\geq 2$, on pose:

$$a_n=2(2^{n-1}-1),\quad b_n=(2^n-1)^2,\quad x_n=2^n-1,\quad y_n=2^{n+1}(2^{n-1}-1).$$

Alors $a_n+b_n=x_n+y_n$, $r(a_nb_n)=r(x_ny_n)$ et donc $\alpha(a_n,b_n,a_n+b_n)=\alpha(x_n,y_n,x_n+y_n)$.

3) Voici d'autres exemples de triplets qui ne sont pas de la forme ci-dessus, ayant le même rapport (1.2), avec:

- Deux représentants: $1 + 2.3 = 2^2 + 3 = 7$;
- Trois représentants: $3 + 2^2.5 = 5 + 2.3^2 = 2^3 + 3.5 = 23$;
- Quatre représentants: $2 + 3.5^2 = 2.5^2 + 3^3 = 2^5 + 3^2.5 = 7.11$;
- Cinq représentants: $2^5.5.7 + 3^2 = 2^3.3^3.5 + 7^2 = 2^2.5^2 + 3.7^3 = 2^{10} + 3.5.7 = 1129$.

Nous allons maintenant montrer que les triplets (a, b, c), d'entiers positifs vérifiant $(a, b) = 1$, $a+b = c$ et pour lesquels $\alpha(a, b, c) > 1$ et $\rho(a, b, c) > 3$ sont nombreux. Soit (X, Y, Z) un triplet d'entiers vérifiant $(X, Y) = 1$, $X \neq Y$, $X + Y = Z$ et Z pair. Ecrivons $X = Ax^3$, $Y = By^3$ et $Z = Cz^3$ où A, B et C sont les parties sans facteur cube de X, Y et Z. Définissons les suites (x_n), (y_n) et (z_n) par $x_0 = x, y_0 = y, z_0 = z$ et par les relations de récurrence:

$$(2.3) \qquad \begin{cases} dx_{n+1} = x_n(Ax_n^3 + 2By_n^3), \\ dy_{n+1} = -y_n(2Ax_n^3 + By_n^3), \\ dz_{n+1} = z_n(Ax_n^3 - By_n^3), \end{cases}$$

où d désigne le pgcd des trois termes de droite.

Proposition 2.4. *Soient (x_n), (y_n) et (z_n) les suites définies par (2.3). Alors pour tout $n \geq 0$, $Ax_n^3 + By_n^3 = Cz_n^3$, $(Ax_n^3, By_n^3) = 1$ et $2^n | z_n$. En particulier les trois suites sont infinies.*

Preuve. Par définition des suites (x_n), (y_n) et (z_n), on a $Ax_0^3 + By_0^3 = Cz_0^3$ avec $(Ax_0^3, By_0^3) = 1$. Supposons ceci vrai pour les termes x_n, y_n, z_n et que $2^n|z_n$. Alors, par les relations (2.3), on a $Ax_{n+1}^3 + By_{n+1}^3 = Cz_{n+1}^3$. Puisque $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = 1$ et C est sans facteur cube, alors $(x_{n+1}, y_{n+1}) = 1$. On a de même $(x_{n+1}, z_{n+1}) = (y_{n+1}, z_{n+1}) = 1$. Ainsi $(Ax_{n+1}^3, By_{n+1}^3) = (A, y_{n+1}^3)(x_{n+1}^3, B)$. Si p est premier et si $p|(Ax_{n+1}^3, By_{n+1}^3)$, alors $p|Cz_{n+1}^3$ et $p|(A, y_{n+1}^3)$ ou $p|(x_{n+1}^3, B)$, ce qui n'est pas possible.

Soit d comme dans (2.3). On a

$$\begin{aligned} \big(x_n(Ax_n^3 + 2By_n^3), y_n(2Ax_n^3 + By_n^3)\big) &= (Ax_n^3 + 2By_n^3, 2Ax_n^3 + By_n^3) \\ &= (3Ax_n^3, 3By_n^3). \end{aligned}$$

Alors $d = 1$ ou $d = 3$. Comme Ax_n^3 et By_n^3 sont impairs, alors $2|(Ax_n^3 - By_n^3)$ et donc $2^{n+1}|z_{n+1}$. La conclusion de la proposition découle du fait que les termes de la suite (z_n) ne s'annulent jamais. ∎

On pose maintenant pour tout $n \geq 0$:

$$(2.5) \qquad \begin{cases} a_n = \min\left(|Ax_n^3|, |By_n^3|, |Cz_n^3|\right), \\ c_n = \max\left(|Ax_n^3|, |By_n^3|, |Cz_n^3|\right), \\ b_n = c_n - a_n, \end{cases}$$

Proposition 2.6. *Soient (x_n), (y_n) et (z_n) les suites définies par (2.3). Alors il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait:*

$$\alpha(a_n, b_n, c_n) > 1, \qquad \rho(a_n, b_n, c_n) > 3.$$

Preuve. Pour tout $n \geq 0$, les triplets (a_n, b_n, c_n) vérifient $a_n + b_n = c_n$ et $(a_n, b_n) = 1$. Alors $r(a_n b_n c_n) = r\left(|ABC||x_n y_n z_n|^3\right)$ et

$$r\left(|ABC||x_n y_n z_n|^3\right) = r\left(2|ABC x_n y_n|\frac{|z_n|}{2^n}\right) \leq |ABC x_n y_n z_n|/2^{n-1}.$$

Soit $n_0 \geq 1$ un entier tel que $|ABC|/2^{n_0-1} < |ABC|^{1/3}$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a:

$$r(a_n b_n c_n) < |ABC|^{1/3}|x_n y_n z_n| = (a_n b_n c_n)^{1/3} < c_n,$$

et donc $\alpha(a_n, b_n, c_n) > 1$ et $\rho(a_n, b_n, c_n) > 3$. ■

La constante $c(\varepsilon)$ de la conjecture abc agit comme un terme correcteur. Nous pouvons utiliser les suites définies par les relations (2.3) pour montrer que la condition $\varepsilon > 0$ est obligatoire dans la conjecture abc.

Proposition 2.7. *Soit $\varepsilon \longmapsto c(\varepsilon)$ une application vérifiant la conjecture abc. Alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) = +\infty.$$

Preuve. On reprend les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par les relations (2.3). Soit n_0 un entier tel que $|ABC|/2^{n_0-1} < |ABC|^{1/3}$. Appliquons la conjecture abc aux triplets (a_n, b_n, c_n) définis par (2.5) avec $n \geq n_0$:

$$c_n \leq c(\varepsilon)\left(r(a_n b_n c_n)\right)^{1+\varepsilon} \leq c(\varepsilon)\left(\frac{c_n}{2^{n-n_0}}\right)^{1+\varepsilon}.$$

Alors $c(\varepsilon) \geq c_n^{-\varepsilon} 2^{(n-n_0)(1+\varepsilon)}$ et donc

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) \geq 2^{n-n_0},$$

ce qui implique que $\lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) = +\infty$. ■

3. - Recherche de bons triplets pour la conjecture abc.

Nous dirons qu'un triplet (a, b, c) d'entiers positifs vérifiant $a + b = c$, $(a, b) = 1$ est *bon* pour la conjecture abc si l'un de ses rapports $\alpha(a, b, c)$ ou $\rho(a, b, c)$ est assez grand par rapport aux valeurs conjecturales 1 et 3. Ceci ne peut se produire que si c ou le produit abc est assez grand par rapport au radical $r(abc)$. Nous résumons dans cette partie une étude amplement détaillée dans [9, 10].

Soit $n \geq 2$ un entier et soient $A > 0$, $B \neq 0$ et $C > 0$ des entiers premiers entre eux deux à deux. Notre recherche de bons triplets pour la conjecture abc va être basée sur la résolution de l'équation diophantienne:

$$Ax^n - By^n = Cz, \tag{3.1}$$

avec $(y, C) = 1$. Cette équation a des solutions si et seulement si la congruence

$$At^n \equiv B \pmod{C}, \tag{3.2}$$

a une solution t avec $0 < |t| < C/2$. Les entiers a, b et c dont on calculera les rapports $\alpha(a, b, c)$ et $\rho(a, b, c)$ seront pris parmi $|Ax^n|$, $|By^n|$ et $|Cz|$, en les réduisant par leur pgcd et pour les quels $|z|$ est assez petit. La recherche de solutions pour l'équation (3.1) avec $|z| = 1$ est basée sur les théorèmes suivants.

Théorème 3.3. *Soient $B < 0$ et n pair. Si $(x, y, 1)$ est une solution de l'équation (3.1) avec $(y, C) = 1$, alors il existe une solution t de (3.2) avec $0 < |t| < C/2$ et une réduite u/y de la fraction continue de t/C telles que $x = ty - Cu$.*

Supposons maintenant $B > 0$ ou n impair. On peut alors définir les quantités:

$$\delta = (B/A)^{1/n},$$
$$y_0 = \left(\frac{2^n}{An\delta^{n-1}}\right)^{1/(n-2)} \quad \text{si } n \geq 3.$$

Pour un réel x, $[x]$ désigne sa partie entière.

Théorème 3.4. *Soient B et n deux entiers tels que $B > 0$ ou n est impair. Soit $(x, y, \pm 1)$ une solution de l'équation (3.1) et soit*

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } x\delta > 0, \\ \cos\left(2\pi \frac{[(n-1)/2]}{n}\right) & \text{si } x\delta < 0. \end{cases}$$

Si $n = 2$ et $AB \geq 4$ ou si $n \geq 3$ et $y \geq y_0$, alors il existe une solution t de (3.2) avec $0 < |t| < C/2$ et une réduite u/y de la fraction continue de $(t - \varepsilon\delta)/C$ telles que $x = ty - Cu$.

Les théorèmes (3.3) et (3.4) nous permettent d'écrire deux algorithmes pour chercher de bons triplets pour la conjecture abc. Pour cela, il faut choisir des entiers A, B et C tels que $r(ABC)$ soit petit par rapport à

$|ABC|$. On peut choisir par exemple $|AB|$ petit et C de la forme p^e où p est premier et où e est un entier assez grand. Les deux algorithmes ont le même principe:

• Déterminer les solutions t de la congruence (3.2) en utilisant une des différentes méthodes connues (voir [4, 22]).

• Déterminer les réduites u/y de $(t-\Delta)/C$ où $\Delta = 0$ si $B < 0$ et n pair et $\Delta = \varepsilon\delta$ sinon.

• Poser $a_0 = A(ty - Cu)^n$, $b_0 = -By^n$ et $c_0 = a_0 + b_0$ et les diviser par leur $pgcd$.

• Poser $a = \min(|a_0|, |b_0|, |c_0|)$, $c = \max(|a_0|, |b_0|, |c_0|)$ et $b = c - a$.

• Calculer $\alpha(a,b,c)$ et $\rho(a,b,c)$ par (1.2) et (1.3). Si l'un de ces rapports est assez grand, enregistrer le triplet (a,b,c).

Nous avons appliqué ces deux méthodes dans les cas suivants:

1) $n = 2$, $1 \leq A \leq |B| \leq 300$, $C = p^e$, où $p \leq 31$ est premier et e est entier vérifiant $p^e \leq 2^{60}$ pour $B < 0$ et $p^e \leq 2^{40}$ pour $B > 0$.

2) $n = 3, 5$, $1 \leq A \leq B \leq 200$, $C = p^e$, où $p \leq 31$ est premier et e est entier vérifiant $p^e \leq 2^{40}$.

Cette recherche a donné 86 triplets (a,b,c) vérifiant $\alpha(a,b,c) \geq 1,4$ sur 115 connus et 103 autres triplets vérifiant $\rho(a,b,c) \geq 3,8$ sur 140 connus. La table (3.6) liste les triplets connus avec $\alpha \geq 1.49$ et la table (3.7) ceux avec $\rho \geq 4,00$, suivant les ordres décroissants de α et ρ.

On peut utiliser une autre méthode pour chercher de bons triplets pour la conjecture *abc*. Cette méthode repose sur la résolution de l'équation diophantienne linéaire:

$$Ax - By = Cz, \tag{3.5}$$

où $A > 0$, $B \neq 0$, $C > 0$ sont premiers entre eux et où $|xyz|$ est petit par rapport à $|ABC|$. Cela peut se faire en déterminant les réduites u/y de $(at-b)/(ac)$ avec $t \equiv ba^{-1} \pmod{C}$, $0 < |t| < C/2$ et en prenant $x = ty - Cu$. On peut augmenter les chances de déterminer de bons triplets en prenant par exemple $A = p_1^{e_1}$, $B = p_2^{e_2}$ et $C = p_3^{e_3}$ où pour $i = 1, 2, 3$, p_i est un nombre premier et où $e_i \geq 1$ est assez grand.

La recherche de bons triplets pour la conjecture *abc*, basée sur la détermination des petites solutions de l'équation (3.5) n'est pas complètement achevée. Elle a permit cependant la découverte de certains bons triplets (notés "N. (1994)" dans les tables (3.6) et (3.7)).

Dans les deux tables ci-dessous, les auteurs des différents exemples sont désignés par leurs initiales:

B.-B.: J. Browkin et J. Brzezinski,

G.: X. Gang,

M.-R.: P. Montgomery et H. te Riele,

N.: A. Nitaj,

R.: E. Reyssat,
W.: B.M.M. de Weger.

Table 3.6				
a	b	c	α	Auteur
2	$3^{10}.109$	23^5	$1,62991$	R. (1987)
11^2	$3^2.5^6.7^3$	$2^{21}.23$	$1,62599$	W. (1985)
19.1307	$7.29^2.31^8$	$2^8.3^{22}.5^4$	$1,62349$	B.-B. (1992)
283	$5^{11}.13^2$	$2^8.3^8.17^3$	$1,58076$	B-B, N. (1992)
1	2.3^7	$5^4.7$	$1,56789$	W. (1985)
7^3	3^{10}	$2^{11}.29$	$1,54708$	W. (1985)
$7^2.41^2.311^3$	$11^{16}.13^2.79$	$2.3^3.5^{23}.953$	$1,54443$	N. (1994)
5^3	$2^9.3^{17}.13^2$	$11^5.17.31^3.137$	$1,53671$	R.-M. (1994)
13.19^6	$2^{30}.5$	$3^{13}.11^2.31$	$1,52700$	N. (1992)
$3^{18}.23.2269$	$17^3.29.31^8$	$2^{10}.5^2.7^{15}$	$1,52216$	N. (1994)
239	$5^8.17^3$	$2^{10}.37^4$	$1,50284$	B.-B., N. (1992)
$5^2.7937$	7^{13}	$2^{18}.3^7.13^2$	$1,49762$	W. (1985)
$2^2.11$	$3^2.13^{10}.17.151.4423$	$5^9.139^6$	$1,49243$	N. (1992)
73	$2^{13}.7^7.941^2$	$3^{16}.103^3.127$	$1,49159$	N. (1992)

Table 3.7				
a	b	c	ρ	Auteur
13.19^6	$2^{30}.5$	$3^{13}.11^2.31$	$4,41901$	N. (1992)
$2^5.11^2.19^9$	$5^{15}.37^2.47$	$3^7.7^{11}.743$	$4,26801$	N. (1994)
$2^{19}.13.103$	7^{11}	$3^{11}.5^3.11^2$	$4,24789$	W. (1985)
$2^{35}.7^2.17^2.19$	$3^{27}.107^2$	$5^{15}.37^2.2311$	$4,23069$	N. (1994)
$3^{18}.23.2269$	$17^3.29.31^8$	$2^{10}.5^2.7^{15}$	$4,22979$	N. (1994)
$17^4.79^3.211$	$2^{29}.23.29^2$	5^{19}	$4,22960$	N. (1994)
$5^{14}.19$	$2^5.3.7^{13}$	$11^7.37^2.353$	$4,22532$	N. (1994)
3^{21}	$7^2.11^6.199$	$2.13^8.17$	$4,20094$	N. (1992)
$5^{18}.6359$	$3^2.47^6.73^3$	$2^7.19^{10}.79$	$4,14883$	N. (1994)
$11^3.31^5.101.479$	107^8	$2^{31}.3^4.5^6.7$	$4,13000$	N. (1994)
$7.11^6.43$	$3^{11}.5^4$	$2^{17}.17^3$	$4,10757$	G. (1986)
$3^6.5^{11}.41$	$2^9.7^9.283$	$13^{10}.53$	$4,09700$	N. (1994)
$2^{16}.41.71$	$3^{15}.7^2$	19^7	$4,09655$	N. (1992)
$3^{12}.5^6$	$7^9.31^2$	$2^9.11^5.571$	$4,09647$	N. (1992)
$7^8.19$	$2^{15}.5^2.37^2$	3.17^7	$4,09080$	N. (1992)
$79^5.677$	2^{42}	$3^{12}.7.13^4$	$4,08331$	N. (1994)
$2^{24}.3^5$	$5.19^5.59^2$	$7^{10}.167$	$4,07114$	N. (1992)
$2.11^2.107^4.359.20947$	$5^3.7^3.29^{11}$	$3^{35}.23^3$	$4,07038$	N. (1994)
$19.47.71^6$	$3^{21}.193^2$	$2^7.5^{12}.127^2$	$4,06347$	N. (1994)
$3^6.157^3.283$	23^{10}	$2^{30}.5^2.11^2.13$	$4,05990$	B.-B., N. (1992)
$7^8.17^3$	$2^{32}.3^2$	$11.13^5.23^2.31$	$4,05301$	N. (1994)
$2^{13}.3^{13}.11^3$	$13.29.43^6.673$	$5^{20}.17$	$4,04710$	N. (1992)
$5^{13}.13$	$2^{17}.19^3.23$	$3^{17}.283$	$4,04498$	N. (1992)
$3^7.5^{14}.7^2$	$2^{51}.11^2$	$29^5.73.419^2.1039$	$4,03039$	N. (1994)
$3^2.5^7.79$	$2^{29}.13$	$11^7.19^2$	$4,02943$	N. (1992)
$3^6.19^{12}$	$2^5.37^3.59^4.19603$	$7^{17}.11^2.71$	$4,02904$	N. (1994)
$2^{41}.97^2$	$73^8.2347$	$3^2.5^5.11^{10}.43.61$	$4,01847$	N. (1994)
2.5^9	3^{14}	$7^5.11.47$	$4,01342$	N. (1992)
2^{37}	$3^{20}.853$	$5^2.7^6.29.191^2$	$4,01312$	N. (1994)
$7^2.41^2.311^3$	$11^{16}.13^2.79$	$2.3^3.5^{23}.953$	$4,00968$	N. (1994)
$2^2.73.89^5.347.997$	$7^4.23^{11}$	$3^{36}.19$	$4,00764$	N. (1994)
$2^{22}.11.43$	$3^2.17^7$	$7^2.41^5$	$4,00751$	N. (1994)
$2^{10}.19^{10}$	$5^6.13^4.29^5$	$3^{20}.4425749$	$4,00292$	N. (1992)
$2^{11}.11^4.13^2.23$	3^{25}	$73.29^5.137$	$4,00238$	N. (1994)
$5^3.11^4.31^2$	$3^{17}.7^2$	$2^{25}.241$	$4,00087$	N. (1992)

Plusieurs autres méthodes ont été mises au point pour la recherche de bons triplets pour la conjecture abc, avec plus ou moins de succès.

- En 1985, de Weger [21], a donné dans sa thèse une première table, en résolvant l'équation $x + y = z$ avec $r(xyz)$ fixé.

- En 1992, Brzezinski et Browkin [1] ont utilisé une méthode basée sur la détermination des réduites des nombres $d^{1/n}$ pour d et n donnés, en prenant les entiers a, b, c parmi $|x^n|$, $|y^n d|$ et $|x^n - dy^n|$.

- En 1992, Elkies et Kanapka ont testé tous les triplets (a, b, c) avec $c < 2^{32}$ et tentent de mener leur recherche en poussant la borne à 2^{40} (Communication privée).

- En 1994, Montgomery et te Riele ont cherché de bons triplets en utilisant une variante de l'algorithme LLL (Communication privée).

Malgré toutes ces recherches, les exemples (1.4) restent les meilleurs pour les rapports (1.2) et (1.3). Il est à noter que les exemples (1.4) correspondent à des triplets (a, b, c) dans lesquels c est relativement petit à l'intérieur du domaine exploré. D'autre part, le théorème de Mason (voir [8]) empêche l'existence de bonnes familles infinies pour la conjecture abc, qui soient paramétrables polynômialement. Ceci nous amène tout naturellement à proposer:

Conjecture 3.8. *Soit (a, b, c) un triplet d'entiers positifs vérifiant $a + b = c$ et $(a, b) = 1$. Alors:*

$$c < r(abc)^{1,63}, \qquad abc < r(abc)^{4,42}.$$

Les tables (3.6) et (3.7) nous renseignent aussi sur l'expression de la constante $c(\varepsilon)$ de la conjecture abc. Pour en donner une estimation, il faut tenir compte de la proposition (2.7), mais aussi du théorème suivant (voir [7]).

Théorème 3.9. *(Masser) Pour tout $\delta > 0$, il existe un triplet (a, b, c) d'entiers positifs vérifiant $a + b = c$, $(a, b) = 1$ et tel que*

$$abc \geq r^3 exp\{(12 - \delta)(\log r)^{1/2}(\log\log r)^{-1}\},$$

où $r = r(abc)$.

Ce théorème implique en particulier que l'inégalité de la conjecture abc ne peut pas être de la forme $c \leq k_1 r(abc) \log r(abc)^{k_2}$ où k_1 et k_2 sont des constantes. Par conséquent, la constante $c(\varepsilon)$ ne peut pas être de la forme $c(\varepsilon) = (1/\varepsilon)^{k_3}$ où k_3 est une constante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BROWKIN and J. BRZEZINSKI, *Some remarks on the abc-conjecture,* Math. Comp. **62** (1994), 931 – 939.

[2] N.D. ELKIES, *ABC implies Mordell,* Intern. Math. Res. Notices **7** (1991), 99 – 109.

[3] G. FREY, *Links between elliptic curves and solutions of* $A - B = C$, Number Theory, Ulm 1987, Lect. Notes in Math. **1380**.

[4] K. HARDY, J.B. MUSKAT and K.S. WILLIAMS, *A deterministic algorithm for solving* $n = fu^2 + gv^2$ *in coprime integers* u *and* v*,* Math. Comp. **55** (1990), 327 – 343.

[5] S. LANG, *Old and new conjectured diophantine inequalities*, Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1990), 37 – 75.

[6] M. LANGEVIN, *Cas d'égalité pour le théorème de Mason et applications de la conjecture* (*abc*), C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317 (1993), 441 – 444.

[7] D.W. MASSER, *Note on a conjecture of Szpiro*, Astérisques **183** (1990), 19 – 23.

[8] R.C. MASON, *Diophantine equations over Function Fields,* LMS Lecture Notes **96**, Cambridge University Press 1984.

[9] A. NITAJ, *An algorithm for finding good abc-examples*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317 (1993), 811 – 815.

[10] A. NITAJ, *Algorithms for finding good examples for the abc and the Szpiro conjectures*, Experimental Math. **2** (1993), 223 – 230.

[11] A. NITAJ, *La conjecture abc*, L'Ens. Math. à paraître.

[12] J. OESTERLE, *Nouvelles approches du théorème de Fermat*, Séminaire Bourbaki, 1987-88, no. 694. (Astérisque, vols. 161-162, pp 165-186) Paris, Soc. Math. Fr. 1988.

[13] M. OVERHOLT, *The diophantine equation* $n! + 1 = m^2$, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 104.

[14] D. RICHARD, *Equivalence of some questions in mathematical logic with some conjectures in Number Theory,* Number Theory and Applications, R. A. Mollin ed. , NATO-ASI Ser. (C-265), Kluwer, (1989), 529 – 545.

[15] W.M. SCHMIDT, *Diophantine Approximations and Diophantine Equations*, Lect. Notes in Math. **1467**, Springer-Verlag 1991.

[16] J.H. SILVERMAN, *Wieferich's criterion and the abc-conjecture*, J. Number Theory **30** (1988), 226-237.

[17] C.L. STEWART and R. TIJDEMAN, *On the Oesterlé-Masser conjecture,* Monatsh. Math. **102** (1986), 251 – 257.

[18] C.L. STEWART and K. YU, *On the abc-conjecture,* Math Ann. **291** (1991), 225 – 230.

[19] P. VOJTA, *Diophantine Approximation and Value Distribution Theory,* Lect. Notes in Math. **1239**, Springer-Verlag 1987.

[20] M. WALDSCHMIDT, *Nombres Transcendants,* Lect. Notes in Math. **402**, Springer-Verlag 1974.

[21] B.M.M. de WEGER, *Algorithms for diophantine equations*, CWI Tract, Centr. Math. Comput. Sci. , Amsterdam 1989.

[22] K.S. WILLIAMS and K. HARDY, *A refinement of H.C. Williams'qth root algorithm,* Math. Comp. **61** (1993), 475 – 483.

Abderrahmane Nitaj,
Université de Caen,
Département de Mathématiques,
14032 Caen Cedex
(email: nitaj@math.unicaen.fr)