DÉTERMINATION DE COURBES ELLIPTIQUES POUR LA CONJECTURE DE SZPIRO

Abderrahmane Nitaj (Saarbrücken)

1. Introduction

En 1982, Szpiro [16] a proposé une conjecture reliant le discriminant d'une courbe elliptique et son conducteur. Une version effective de cette conjecture est la suivante [17].

Conjecture (Szpiro). *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que si $E/\mathbb{Q}$ est une courbe elliptique de discriminant minimal Δ et de conducteur N, alors*
$$|\Delta| \leq C_\varepsilon N^{6+\varepsilon}.$$

Cette conjecture est très utile pour l'étude des équations diophantiennes exponentielles, et son analogue pour les corps de fonctions est démontré (voir [7] et [17]). Elle implique que le rapport

$$\sigma = \sigma(E) = \frac{\log |\Delta|}{\log N}, \tag{1}$$

appelé rapport de Szpiro, est borné. On peut montrer en fait qu'il existe une infinité de courbes elliptiques pour lesquelles $\sigma \geq 6$ (voir [13]). La valeur asymptotique conjecturale de σ est donc 6. D'autre part, Fouvry et al. [6] ont montré que pour toute constante $K > 1$, la proportion des courbes elliptiques E, semi-stables, avec $\sigma(E) > K$ est nulle et que le rapport de Szpiro est " presque partout" voisin de 1.

Le but de cet article est de décrire des méthodes qui permettent de déterminer des courbes elliptiques ayant un rapport de Szpiro (1) assez grand. Par exemple, la courbe elliptique définie par l'équation

$$y^2+xy = x^3+x^2+349410011109107572x-775428774618307505842556592,$$

admet pour rapport de Szpiro :

$$\sigma = \frac{\log(2^{26} \cdot 3^{52} \cdot 5 \cdot 11^8 \cdot 13 \cdot 19^6 \cdot 31^4)}{\log(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31)} \simeq 8.811944.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 11D41, 11Y99.

Key words and phrases. Courbe elliptique, isogénie, conjecture de Szpiro.

Research supported by the TMR programme of the European Community under contract ERBFMBICT960848.

Cet exemple provient en fait de la famille des courbes elliptiques d'équation $y^2 = x(x^2 + 2(s+t)x + (s-t)^2)$ et de discriminant $\Delta = 2^8 st(s-t)^4$ (voir partie 4), avec ici $s = 2^{30} \cdot 5$, $t = -13 \cdot 19^6$ et $s - t = 3^{13} \cdot 11^2 \cdot 31$. Ceci met en évidence un lien entre la conjecture de Szpiro et les "bons exemples" de la conjecture *abc* (voir [11]). Ces exemples ont été utilisées par ailleurs par de Weger [20] pour construire des courbes elliptiques ayant un grand groupe de Tate-Shafarevich.

Plus généralement, soit $E(s,t)$ une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}(s,t)$ par l'équation de Weierstrass :

$$E(s,t): \; y^2 + a_1(s,t)xy + a_3(s,t)y = x^3 + a_2(s,t)x^2 + a_4(s,t)x + a_6(s,t),$$

avec $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in \mathbb{Z}[s,t]$. Soit $P = (x,y)$ un point rationnel de $E(s,t)$, d'ordre $m \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$. Le choix de telles familles de courbes elliptiques est basé sur trois remarques, concernant le discriminant $\Delta(s,t)$ de $E(s,t)$:

(i) Si $m \geq 3$, le théorème de Nagell-Lutz (voir [8] ou [14]) implique que $4\Delta(s,t)$ est divisible par $(2y + a_1x + a_3)^2$.

(ii) Le discriminant s'écrit sous la forme $\Delta(s,t) = f(s,t)^m g(s,t)$, avec $f, g \in \mathbb{Z}[s,t]$.

(iii) Si on désigne par $N_0(s,t)$ le conducteur de $E(s,t)$, alors il y a égalité dans la relation de Kodaira :

$$\deg \Delta(s,t) \leq 6 \deg N_0(s,t) - 12.$$

Cette inégalité est l'équivalent de la conjecture de Szpiro pour les corps de fonctions de genre et caractéristique nuls (voir [7] et [17] pour d'autres versions). Les remarques (ii) et (iii) sont aussi vérifiées par les différentes isogènes de $E(s,t)$.

Dans ce travail, la recherche de courbes elliptiques ayant un grand rapport de Szpiro se résume de la façon suivante. On commence par exhiber une courbe elliptique dépendant de deux paramètres s et t, pour laquelle le point

$$P_0 = (0,0),$$

est un point de torsion d'ordre $m \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$. On détermine ensuite toutes ses isogènes et on cherche, en résolvant certaines équations diophantiennes, des valeurs particulières de s et t qui rendent le rapport (1) assez grand. Ces résultats sont listés dans des tables contenant les dix grandes valeurs du rapport (1) ainsi obtenues pour chaque valeur de m. On calcule ensuite le rapport de Szpiro de certaines tordues quadratiques des courbes elliptiques dans chaque table, et on liste les six meilleurs exemples. Dans toutes les tables, $T(E)$ désigne le sous-groupe des points de torsion de E :

$$T(E) = E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}.$$

Tous les calculs ont été effectués en utilisant le système SIMATH [15]. On peut cependant vérifier les résultats à l'aide d'autres systèmes de calcul comme PARI [2] ou APECS [4].

Le plan du présent article est le suivant. On rappelle dans la partie 2 quelques notions utiles concernant les courbes elliptiques, la partie 3 décrit les différentes méthodes employées pour déterminer des courbes elliptiques ayant un grand rapport de Szpiro, et les parties 4 à 10 sont consacrées à la recherche de telles courbes. Enfin, dans la partie 11, on donne brièvement la raison pour laquelle on s'est limité aux courbes elliptiques ayant un point de torsion d'ordre $m \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$.

Je tiens à remercier le Professeur H.G. Zimmer qui m'a indiqué l'article de T. Nagell [10], un des travaux pionniers dans le domaine de la recherche des points de torsion des courbes elliptiques.

2. Points de torsion et isogénies

Soit E une courbe elliptique définie par l'équation de Weierstrass :

$$E:\ y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \tag{2}$$

avec $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in \mathbb{Z}$. On note O le point à l'infini de E. Les quantités habituelles b_2, b_4, b_6, b_8, c_4 et c_8 liées à E, sont données par (voir [14]) :

$$b_2 = a_1^2 + 4a_2,\ b_4 = a_1a_3 + 2a_4,\ b_6 = a_3^2 + 4a_6,\ b_8 = \left(b_2b_6 - b_4^2\right)/4,$$

$$c_4 = b_2^2 - 24b_4,\ c_6 = -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6.$$

Le discriminant de E est alors $\Delta = \left(c_4^3 - c_6^2\right)/1728$. Si Δ est minimal, le conducteur N de E est (voir [14], p. 361) :

$$N = \prod_{p|\Delta} p^{n_p},\ p \text{ premier},$$

avec :

$$n_p = \begin{cases} 1 & \text{si } E \text{ a une réduction multiplicative en } p, \\ 2 & \text{si } E \text{ a une réduction additive en } p \geq 5, \\ 2+\varepsilon_p & \text{si } E \text{ a une réduction additive en } p = 2,3,\ (0 \leq \varepsilon_p \leq 6). \end{cases}$$

Ainsi, si E admet en tout nombre premier une bonne réduction ou une réduction multiplicative (E est dite semi-stable), son conducteur est le produit des facteurs premiers de son discriminant minimal.

On considère le polynôme $\Psi_n(x,y)$ défini pour tout $n \geq 0$ à partir des formules de récurrence (voir [1], [18]) :

$$\begin{aligned} &\Psi_0 = 0, \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = 2y + a_1x + a_3, \\ &\Psi_3 = 3x^4 + b_2x^3 + 3b_4x^2 + 3b_6x + b_8, \\ &\Psi_4 = \Psi_2\Big(2x^6 + b_2x^5 + 5b_4x^4 + 10b_6x^3 + 10b_8x^2 \\ &\qquad\qquad + (b_2b_8 - b_4b_6)x + b_4b_8 - b_6^2\Big), \end{aligned}$$

et pour $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} \Psi_{2m+1} &= \Psi_{m+2}\Psi_m^3 - \Psi_{m-1}\Psi_{m+1}^3, \\ \Psi_{2m} &= \Psi_m\left(\Psi_{m+2}\Psi_{m-1}^2 - \Psi_{m-2}\Psi_{m+1}^2\right)/\Psi_2. \end{aligned}$$

On a en particulier l'égalité :

$$\Psi_2^2 = 4x^3 + b_2x^2 + 2b_4x + b_6.$$

Soit $P = (x, y) \neq O$ un point de $E(\mathbb{Q})$. Alors P est un point de torsion d'ordre $m \geq 2$ si, et seulement si $\Psi_m(x, y) = 0$. De plus si $P = (x, y)$ est un point de 2-torsion, alors $y = -(a_1x + a_3)/2$.

Si une courbe elliptique E admet un sous-groupe fini G, alors il existe une unique courbe elliptique E/G et une isogénie ϕ de E dans E/G, ayant G pour noyau (voir [14], p. 78). L'équation de E/G et l'expression de ϕ peuvent être déterminées par les formules de Vélu [19], de la façon suivante. Soit F_2 le sous-groupe des points d'ordre 2 de $G - \{O\}$. On peut écrire $G - \{O\} = F_2 \cup R \cup (-R)$, avec $R \cap (-R) = \emptyset$. Soit $S = R \cup F_2$. Pour $Q = (x_Q, y_Q) \in S$, on pose :

$$\begin{aligned}
g_Q^x &= 3x_Q^2 + 2a_2x_Q + a_4 - a_1y_Q,\\
g_Q^y &= -2y_Q - a_1x_Q - a_3,\\
u_Q &= 4x_Q^3 + b_2x_Q^2 + 2b_4x_Q + b_6,\\
t_Q &= \begin{cases} x_Q^2 + 2a_2x_Q + a_4 - a_1y_Q & \text{si } Q \in F_2,\\ 6x_Q^2 + b_2x_Q + b_4 & \text{si } Q \in R,\end{cases}\\
U_Q &= \frac{t_Q}{x - x_Q} + \frac{u_Q}{(x - x_Q)^2},\\
V_Q &= \frac{2y + a_1x + a_3}{(x - x_Q)^3} + t_Q\frac{a_1(x - x_Q) + y - y_Q}{(x - x_Q)^2} + \frac{a_1u_Q - g_Q^xg_Q^y}{(x - x_Q)^2},
\end{aligned}$$

et enfin

$$t = \sum_{Q\in S} t_Q, \qquad w = \sum_{Q\in S}(u_Q + x_Qt_Q).$$

Théorème 1 (Vélu). *Une isogénie $\phi : E \longrightarrow E/G$, qui envoie (x, y) sur (X, Y) est donnée par :*

$$X = x + \sum_{Q\in S} U_Q, \quad Y = y - \sum_{Q\in S} V_Q.$$

L'équation de E/G est donnée par l'équation :

$$Y^2 + a_1XY + a_3Y = X^3 + a_2X^2 + (a_4 - 5t)X + a_6 - b_2t - 7w.$$

3. Méthodes utilisées

3.1 Recherche directe.

Soit E une courbe elliptique ayant P_0 pour point de torsion d'ordre $m \geq 2$. D'après le théorème de Mazur (voir [8]), $m \in \{2, 3, \cdots, 10, 12\}$. D'autre part, ces courbes dépendent de plusieurs paramètres (voir [8], [9] ou [10]), mais on peut les ramener à deux paramètres s et t :

$$E(s, t) : \; y^2 + a_1(s, t)xy + a_3(s, t)y = x^3 + a_2(s, t)x^2 + a_4(s, t)x. \qquad (3)$$

Pour $m \geq 4$, la courbe de Tate (voir [8]) définie par :

$$E(A,B,C): \; y^2 + (C-A)xy - BC^2y = x^3 - BCx^2, \tag{4}$$

admet P_0 comme point de torsion d'ordre m, suivant les valeurs de A, B et C. Dans tous les cas, cette courbe se ramène à la forme (3). A part les cas $m = 2$ et $m = 3$, le discriminant de (3) se factorise sous la forme :

$$\Delta = \Delta(s,t) = Ks^e t^f \prod_{i=1}^{g} F_i^{n_i}(s,t),$$

où K est une constante, et pour $1 \leq i \leq g$, F_i est une forme binaire irréductible sur $\mathbb{Q}$, de degré $n \geq 1$. Les grandes valeurs du rapport de Szpiro correspondent à des discriminants grands par rapport aux conducteurs. Une première méthode consiste à déterminer des entiers s, t et z, vérifiant l'équation :

$$F(s,t) = Mz = z \prod_{j=1}^{k} p_j^{e_j}, \tag{5}$$

où $F = F_i$ est l'une des formes binaires composant Δ, $p_1, \cdots, p_k$ des nombres premiers fixés, $e_j \geq 1$, et $|z|$ est assez petit par rapport à M. Si le degré de F est $n = 1$, on applique l'algorithme d'Euclide. Supposons donc que $n \geq 2$. On pose :

$$S_1 = \{\theta; \theta \in \mathbb{C}, F(\theta,1) = 0\},$$
$$S_2 = \{T; T \in \mathbb{Z}, 1 \leq T < M, F(T,1) \equiv 0 \pmod{M}\}.$$

La détermination de S_2 se fait à l'aide du lemme de Hensel, combiné avec la méthode de Shanks si $n = 2$ ou la méthode de Berlekamp si $n \geq 3$ et à l'aide du théorème chinois (voir [3]). Soit (s,t,z) une solution de (5), vérifiant $(t,M) = 1$. Soit $\theta \in S_1$ vérifiant :

$$|s - t\theta| \leq \min_{\theta_i \in S_1} |s - t\theta_i|. \tag{6}$$

On désigne par $\Re(\theta)$ la partie réelle de θ et par $\Im(\theta)$ sa partie imaginaire. Soit $\alpha \geq 0$. Si $\Im(\theta) \neq 0$, on pose :

$$V_0 = V_0(\theta) = \left(\frac{2^{n-1}M^{1+\alpha}}{|F'(\theta,1)\Im(\theta)|}\right)^{1/n}.$$

Si $n \geq 3$, on pose :

$$V_1 = V_1(\theta) = \left(\frac{2^n M^\alpha}{|F'(\theta,1)|}\right)^{1/(n-2)}.$$

Lemme 2. *Soient $\alpha \geq 0$ et (s,t,z) une solution de (5) vérifiant $(t,M)=1$ et $|z| \leq M^\alpha$. Alors il existe une racine $\theta \in S_1$ et un entier $T \in S_2$ tels que :*

(a) *si $n=2$ et $|F'(\theta,1)| \geq 4M^\alpha$ ou si $n \geq 3$ et $|t| \geq V_1$, alors il existe un entier u tel que $s = Tt - Mu$ et u/t est une réduite de la fraction continue de $(T - \Re(\theta))/M$,*

(b) *si de plus $\Im(\theta) \neq 0$, alors $|t| \leq V_0$.*

Preuve. (a) D'après (6), on a pour tout $\theta_i \in S_1$:

$$\left|\frac{s}{t} - \theta_i\right| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{s}{t} - \theta_i\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{s}{t} - \theta\right| \geq \frac{1}{2}\left|\theta - \theta_i\right|,$$

ce qui donne

$$\prod_{\theta_i \neq \theta}\left|\frac{s}{t} - \theta_i\right| \geq \frac{1}{2^{n-1}}\prod_{\theta_i \neq \theta}|\theta - \theta_i| = \frac{|F'(\theta,1)|}{2^{n-1}|a_0|},$$

où a_0 est le coefficient de s^n dans $F(s,t)$. D'autre part, on a :

$$|F(s,t)| = |a_0||t|^n\left|\frac{s}{t} - \theta\right|\prod_{\theta_i \neq \theta}\left|\frac{s}{t} - \theta_i\right|,$$

d'où :

$$\left|\frac{s}{t} - \theta\right| \leq \frac{2^{n-1}|F(s,t)|}{|F'(\theta,1)||t|^n} \leq \frac{2^{n-1}M^{1+\alpha}}{|F'(\theta,1)||t|^n}.$$

Soit $T \equiv st^{-1} \pmod{M}$ avec $1 \leq T < M$, alors $T \in S_2$. Soit u l'entier vérifiant $s = Tt - Mu$. L'inégalité ci-dessus devient :

$$\left|\frac{u}{t} - \frac{T-\theta}{M}\right| \leq \frac{2^{n-1}M^\alpha}{|F'(\theta,1)||t|^n}. \tag{7}$$

Si $n=2$, cette inégalité donne :

$$\left|\frac{u}{t} - \frac{T-\Re(\theta)}{M}\right| \leq \frac{2M^\alpha}{|F'(\theta,1)|t^2},$$

et donc, si $|F'(\theta,1)| \geq 4M^\alpha$, alors u/t est une réduite de la fraction continue de $(T - \Re(\theta))/M$.

Si $n \geq 3$, alors (7) donne :

$$\left|\frac{u}{t} - \frac{T-\Re(\theta)}{M}\right| \leq \left(\frac{V_1}{|t|}\right)^{n-2}\frac{1}{2t^2},$$

et si $|t| \geq V_1$, u/t est une réduite de la fraction continue de $(T - \Re(\theta))/M$.

(b) Si de plus $\Im(\theta) \neq 0$, alors (7) donne :

$$|\Im(\theta)| \leq \left(\frac{V_0}{|t|}\right)^n |\Im(\theta)|,$$

et donc $|t| \leq V_0$. $\square$

Remarque 1. Dans la pratique, ce lemme sera utilisé pour déterminer des entiers s et t vérifiant l'équation (5), à partir des premières réduites de $(T-\Re(\theta))/M$, où $\theta \in S_1$ et $T \in S_2$. La restriction sur z sera donc ignorée.

Les factorisations des discriminants des courbes elliptiques étudiées dans la suite nous amènent à traiter les équations suivantes :

$$aX^n - bY^n = Mz, \ n \geq 1, \tag{8}$$

$$X^2 + 11XY - Y^2 = Mz, \tag{9}$$

$$X^3 - 8X^2Y + 5XY^2 + Y^3 = Mz, \tag{10}$$

$$8X^2 - 8XY + Y^2 = Mz. \tag{11}$$

Les valeurs de n, a, b et M seront fixées à l'occasion de chaque appel à l'une de ces équations. L'équation (8) a déjà servi par ailleurs à chercher des exemples optimaux pour la conjecture abc (voir [11]).

3.2 Utilisation des tordues quadratiques.

Soit d un entier sans facteurs carrés. La tordue quadratique $E^{(d)}$ d'une courbe elliptique E donnée par (2) a pour équation :

$$E^{(d)} : \ y^2 + a_1^{(d)}xy + a_3^{(d)}y = x^3 + a_2^{(d)}x^2 + a_4^{(d)}x + a_6^{(d)},$$

avec

$$a_1^{(d)} = a_1, \ a_2^{(d)} = a_2 d + \frac{a_1^2(d-1)}{4}, \ a_3^{(d)} = a_3,$$
$$a_4^{(d)} = a_4 d^2 + \frac{a_1 a_3(d^2-1)}{2}, \ a_6^{(d)} = a_6 d^3 + \frac{a_3^2(d^3-1)}{4}.$$

Ses covariants $\Delta^{(d)}$ et $c_4^{(d)}$, non nécessairement minimaux, sont liés à ceux de E par les relations :

$$\Delta^{(d)} = d^6\Delta, \quad c_4^{(d)} = d^2 c_4.$$

Le conducteur de $E^{(d)}$ est composé des facteurs premiers de $4Nd$, et, dans un cas particulier, on a la proposition suivante, relative à son rapport de Szpiro $\sigma^{(d)}$.

Proposition 3. *Soit E une courbe elliptique semi-stable de discriminant minimal Δ, de conducteur N et de rapport de Szpiro σ. Soit d un facteur de $\pm N$. Le rapport de Szpiro $\sigma^{(d)}$ de la tordue quadratique $E^{(d)}$ de E vérifie :*

$$\frac{\sigma \log N + 6\log|d|}{\log(16|d|N)} \leq \sigma^{(d)} \leq \frac{\sigma \log N + 6\log|d|}{\log|d|N}.$$

De plus, si $6\log|d|/\log(16|d|) > \sigma$, alors $\sigma^{(d)} > \sigma$ et si $\sigma > 6$, alors $\sigma^{(d)} < \sigma$.

Preuve. Puisque E est semi-stable, son conducteur N est sans facteurs carrés. Le conducteur de $E^{(d)}$ est (voir [5]) $N^{(d)} = ND^2/(N, D^2)$, où D est le discriminant de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, donné par :

$$D = \begin{cases} d & \text{si } d \equiv 1 \pmod 4, \\ 4d & \text{si } d \equiv 2, 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Alors, pour tout nombre premier $p \geq 2$, on a :

$$\mathrm{ord}_p(N^{(d)}) = \max(\mathrm{ord}_p(N), 2\mathrm{ord}_p(D)).$$

En posant

$$\nu = \max\Big(\mathrm{ord}_2(N), 2\mathrm{ord}_2(D)\Big) - \mathrm{ord}_2(N) - \mathrm{ord}_2(d),$$

et comme d divise N, on obtient $\nu \in \{0, 3, 4\}$ et $N^{(d)} = 2^\nu N|d|$. Alors $\Delta^{(d)}$ est minimal et +

$$\sigma^{(d)} = \frac{\log \Delta^{(d)}}{\log N^{(d)}} = \frac{\sigma \log N + 6 \log |d|}{\log(2^\nu |d| N)},$$

ce qui donne les deux inégalités de la proposition. On obtient de même :

$$\sigma^{(d)} - \sigma = \frac{6 \log |d| - \sigma \log 2^\nu |d|}{\log(2^\nu |d| N)}.$$

Si $|d| = 1$, alors $d = -1$ et $\nu \geq 3$. Dans tous les cas, le signe de $\sigma^{(d)} - \sigma$ est le même que celui de la différence $6 \log |d| / \log(2^\nu |d|) - \sigma$, d'où la conclusion de la proposition en remarquant que $6 \log |d| / \log(2^\nu |d|) \leq 6$. $\square$

Remarque 2. Les courbes elliptiques qui seront déterminées par la méthode directe auront toutes un rapport $\sigma > 7.2$. Alors, d'après la conclusion de la proposition 3, on a $\sigma^{(d)} < \sigma$. Ainsi, cette methode ne permet pas d'améliorer les valeurs du rapport (1). Cependant, elle donne de nouvelles courbes elliptiques avec un rapport $\sigma^{(d)}$ assez grand d'une part, et permet d'instaurer une hiérarchie entre les tordues quadratiques des courbes d'une même famille d'autre part.

4. Points de 2-torsion

Pour avoir $2P_0 = O$ sur la courbe elliptique (3), on doit avoir $\Psi_2(0, 0) = 0$, donc $a_3 = 0$ et $a_4 \neq 0$. Le changement de variables $(x, y) = (4x, 8y + 4a_1 x)$ donne la nouvelle équation :

$$E : y^2 = x(x^2 + Ax + 8B), \tag{12}$$

avec $A = 4a_2 + a_1^2$, $B = 2a_4$. Si $P = (x, y)$ est d'ordre 2, alors $\Psi_2(x, y) = 0$, i.e. $x(x^2 + Ax + 8B) = 0$.

4.1. Supposons que le le polynôme $x^2 + Ax + 8B$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On pose $s = A$, $t = 8B$ et :

$$E_1 : \ y^2 = x(x^2 + sx + t).$$

Le discriminant de E_1 est alors :

$$\Delta_1 = 2^4 t^2 (s^2 - 4t).$$

En divisant E_1 par le sous-groupe $\{O, P_0\}$, et en effectuant le changement $(x, y) = (x + s, y)$, on obtient la courbe :

$$E_2 : \qquad y^2 = x(x^2 - 2sx + s^2 - 4t),$$

avec pour discriminant

$$\Delta_2 = 2^8 t(s^2 - 4t)^2.$$

Si on pose $s = 2(u + v)$ et $t = (u - v)^2$, alors $E_1(s, t) = E_4(u, v)$ et $E_2(s, t) = E_3(4u, 4v)$ (voir partie 4.2 ci-dessous), ce qui permet d'utiliser la table 3. Pour avoir des courbes qui ne sont pas de cette famille, on peut considérer l'équation $X^2 - bY^2 = Mz$, qui est de la forme (8) et prendre $s = X$ et

$$t = \begin{cases} bY^2/4 & \text{si } bY^2 \equiv 0 \pmod 4, \\ Mz/4 & \text{si } Mz \equiv 0 \pmod 4), \end{cases}$$

La table 1 a été obtenue en prenant $b = \pm p_1^{k_1}$, $M = p_2^{k_2}$ avec pour $i = 1, 2$, $2 \leq p_i \leq 503$ et $p_1^{k_1} \leq 2^{60}$.

Table 1

E	s	t	$\lvert T(E)\rvert$	σ
E_2	1087.3187	$-2^{29}.5^2$	2	8.801596
E_2	40103941	$2^{36}.7^2.101$	2	8.485421
E_2	-1693.5279	$-2^{21}.691^2$	2	8.294402
E_2	$-7.173.1277.2081$	$-5^7.1217^2$	2	8.273195
E_1	40103941	$2^{36}.7^2.101$	2	8.270467
E_2	118746513373	$2^8.11^{17}$	2	8.247556
E_1	-1019801.7867	$2^4.3^{29}.11^4$	2	8.034090
E_2	17.61.239.569939	$2^{55}.3^8.5^2$	2	8.005377
E_2	$-7.17.43.919903$	$-3^2.101^7$	2	7.938372
E_2	$-3.19.4861.10459$	$2^2.11^{13}.137^2$	2	7.909145

En prenant des tordues quadratiques de certaines courbes de la table 1, on obtient la table 2.

Table 2

E	s	t	d	$\lvert T(E^{(d)})\rvert$	$\sigma^{(d)}$
E_2	1087.3187	$-2^{29}.5^2$	-3	2	8.502119
E_2	1087.3187	$-2^{29}.5^2$	5	2	8.383644
E_2	40103941	$2^{36}.7^2.101$	5	2	8.178616
E_2	1087.3187	$-2^{29}.5^2$	-15	2	8.163342
E_2	1087.3187	$-2^{29}.5^2$	17	2	8.140801
E_2	40103941	$2^{36}.7^2.101$	-7	2	8.123807

4.2. Supposons maintenant que $x^2 + Ax + 8B = (x - s)(x - t)$, alors la courbe (12) s'écrit

$$E_3 : \; y^2 = x(x - s)(x - t),$$

et a pour discriminant

$$\Delta_3 = 2^4 s^2 t^2 (s-t)^2.$$

La courbe E_3 admet P_0, $P_1 = (s,0)$ et $P_2 = (t,0)$ comme points de 2-torsion. En divisant E_3 par le sous-groupe $\{O, P_0\}$ et en posant $(x,y) = (x+s+t, y)$, on obtient la courbe :

$$E_4 : \; y^2 = x\left(x^2 + 2(s+t)x + (s-t)^2\right),$$

de discriminant

$$\Delta_4 = 2^8 st(s-t)^4.$$

En divisant E_3 par le sous-groupe $\{O, P_1\}$ et en posant $(x,y) = (x-s+t, y)$, on obtient la courbe :

$$E_5 : \; y^2 = x\left(x^2 - 2(2s-t)x + t^2\right),$$

de discriminant

$$\Delta_5 = 2^8 st^4(s-t).$$

En divisant E_3 par le sous-groupe $\{0, P_2\}$ et en posant $(x,y) = (x+s-t, y)$, on obtient la courbe :

$$E_6 : \; y^2 = x\left(x^2 + 2(s-2t)x + s^2\right),$$

de discriminant

$$\Delta_6 = -2^8 s^4 t(s-t).$$

Pour les courbes E_3, E_4 et E_5, on doit trouver des entiers s et t, premiers entre eux, pour lesquels le rapport

$$\frac{\log|st(s-t)|}{\log \operatorname{rad}(st(s-t))}$$

est assez grand, où $\operatorname{rad}(st(s-t))$ désigne le produit des facteurs premiers de $st(s-t)$. On peut donc prendre s et t parmi les membres de la relation (8). La table 3 a été obtenue à partir des exemples pour la conjecture *abc* listés dans [12].

Table 3

E	s	t	$\lvert T(E)\rvert$	σ
E_4	$2^{30}.5$	-13.19^6	2	8.811944
E_4	$2^{10}.5^2.7^{15}$	$3^{18}.23.2269$	2	8.688968
E_5	$2^5.3.7^{13}$	$11^7.37^2.353$	2	8.531805
E_5	$2^5.11^2.19^9$	$3^7.7^{11}.743$	2	8.482076
E_3	$2^{30}.5$	-13.19^6	4	8.461892
E_5	$2^{35}.7^2.17^2.19$	$5^{15}.37^2.2311$	2	8.449373
E_5	$2^8.3^{22}.5^4$	$7.29^2.31^8$	2	8.447398
E_4	$2^{35}.7^2.17^2.19$	$5^{15}.37^2.2311$	2	8.438253
E_4	$2^5.11^2.19^9$	$3^7.7^{11}.743$	2	8.422413
E_5	$2^{19}.13.103$	$3^{11}.5^3.11^2$	2	8.420203

En prenant des tordues quadratiques convenables des courbes de la table 3, on obtient la table 4.

Table 4

E	s	t	d	$\lvert T(E^{(d)})\rvert$	$\sigma^{(d)}$
E_4	$2^{30}.5$	-13.19^6	-3	2	8.616929
E_4	$2^{10}.5^2.7^{15}$	$3^{18}.23.2269$	-3	2	8.579323
E_4	$2^{30}.5$	-13.19^6	5	4	8.535178
E_4	$2^{10}.5^2.7^{15}$	$3^{18}.23.2269$	5	2	8.531330
E_4	$2^{10}.5^2.7^{16}$	$3^{18}.7.23.2269$	-7	2	8.500682
E_4	$2^{10}.5^2.7^{15}$	$3^{18}.23.2269$	-15	2	8.433931

5. Points de 3-torsion

Pour avoir $3P_0 = O$ sur la courbe (3), il faut avoir $\Psi_3(0,0) = 0$, et donc $a_4^2 + a_1a_3a_4 - a_3^2a_2 = 0$. Si $a_3 = 0$, alors $a_4 = 0$ et $\Delta = 0$. Ainsi $a_3 \neq 0$ et donc

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}\right)$$

est entier. On pose $s = \pm\sqrt{a_1^2 + 4a_2}$ et $t = a_3$. Alors $a_2 = (s^2 - a_1^2)/4$ et $a_4 = t(s - a_1)/2$. Le changement de variables$(x, y) = (x, y + a_1x/2)$ donne la courbe d'équation :

$$E_7 :\ y^2 + ty = x^3 + \frac{1}{4}s^2x^2 + \frac{1}{2}stx,$$

de discriminant

$$\Delta_7 = t^3(s^3 - 27t).$$

En divisant E_7 par le sous-groupe engendré par P_0, on trouve la courbe :

$$E_8 :\ y^2 + ty = x^3 + \frac{1}{4}s^2x^2 - \frac{9}{2}stx - t(s^3 + 7t),$$

de discriminant

$$\Delta_8 = t(s^3 - 27t)^3.$$

Pour les courbes E_7 et E_8, on peut considérer l'équation $X^3 - bY^3 = Mz$, qui est de la forme (8), et prendre $s = X$, et

$$t = \begin{cases} bY^3/27 & \text{si } bY^3 \equiv 0 \pmod{27}, \\ Mz/27 & \text{si } Mz \equiv 0 \pmod{27}, \end{cases}$$

Dans la table 5, on a utilisé $1 \leq b \leq 700$, $M = p^k$ où p est premier vérifiant $2 \leq p \leq 200$ et $p^k \leq 2^{60}$.

On peut d'autre part prendre $s = u + 4v$ et $t = u^2v$, ce qui donne :

$$\Delta_7 = u^6v^3(u+v)(u-8v)^2, \qquad \Delta_8 = u^2v(u+v)^3(u-8v)^6.$$

Il suffit ensuite de prendre u et v parmi les membres de l'égalité (8). Dans la table 5, on a utilisé les exemples pour la conjecture abc listés dans [12]. Les courbes obtenues par cette méthode sont notées E_7' ou E_8'.

Table 5				
E	s	t	$\vert T(E)\vert$	σ
E_8	811.3089	$-2^5.41^8.1069$	1	8.596580
E_8'	17.457	$2^{11}.3^4.47^2$	2	8.525311
E_8	11.47.487	$3^3.7^{13}.13$	1	8.245590
E_8	-39367	$19^6.227$	1	8.177904
E_7	811.3089	$-2^5.41^8.1069$	3	8.157876
E_8	2339	$3^{20}.7^2$	1	8.072691
E_8'	$2^2.4519$	$2^{28}.3^2.47$	2	8.063526
E_7	3.811.3089	$5^{13}.7^4.199^3$	3	8.048272
E_8'	7.83	$-3^8.5^4.19^2$	2	8.035245
E_8	53.809	$-3^4.11^4$	1	7.965130

Les tordues quadratiques des courbes de la table 5 donnent la table 6.

Table 6					
E	s	t	d	$\vert T(E^{(d)})\vert$	$\sigma^{(d)}$
E_8	811.3089	$-2^5.41^8.1069$	5	1	8.405226
E_8	811.3089	$-2^5.41^8.1069$	-7	1	8.368732
E_8'	17.457	$2^{11}.3^4.47^2$	-3	6	8.309591
E_8'	17.457	$2^{11}.3^4.47^2$	5	2	8.221360
E_8	811.3089	$-2^5.41^8.1069$	-35	1	8.208450
E_8	811.3089	$-2^5.41^8.1069$	41	1	8.193856

6. Points de 4-torsion

Pour avoir $4P_0 = O$, sur la courbe (4), il faut $\Psi_4(0,0) = 0$, et donc $A = 0$. Les points de 2-torsion sont alors de la forme $P = (x, -(Cx - BC^2)/2)$, où x vérifie l'équation $\Psi_2(x,y) = 0$, et donc :

$$(x - BC)(4x^2 + C^2x - C^3B) = 0.$$

4.1. Supposons que $4x^2 + C^2x - C^3B$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On pose alors $s = 16B$ et $t = -C$. L'équation (4) devient donc, après réduction :

$$E_9 :\ y^2 - 4txy - 4st^2y = x^3 + stx^2,$$

et a pour discriminant

$$\Delta_9 = -2^8 s^4 t^7 (s - t).$$

Le point $2P_0$ est l'unique point de de 2-torsion de E_9. En divisant E_9 par le sous-groupe $\{O, 2P_0\}$, et en simplifiant, on obtient la courbe :

$$E_{10}:\ y^2 - 2txy - \frac{1}{2}st^2y = x^3 + \frac{1}{4}stx^2 - \frac{5}{16}s^2t^2x + \frac{1}{64}s^2t^3(3s - 16t),$$

de discriminant

$$\Delta_{10} = 2^4s^2t^8(s - t)^2.$$

En divisant E_9 par le sous-groupe engendré par P_0, on obtient :

$$E_{11}:\ y^2 - 2txy - \frac{1}{2}st^2y = x^3 + \frac{1}{4}stx^2 + a_4x + a_6,$$

avec :

$$a_4 = -\frac{5}{16}st^2(s + 16t), \quad a_6 = \frac{1}{64}st^3(3s^2 - 192st - 256t^2).$$

Le discriminant de E_{11} est :

$$\Delta_{11} = 2^8st^7(s - t)^4.$$

La courbe E_{10} admet trois points de torsion d'ordre 2 :

$$R_1 = \left(st/4, st^2/2\right), \quad R_2 = \left(t(s - 4t)/4, t^2(s - 2t)/2\right),$$
$$R_3 = \left(-3ts/4, -st^2/2\right).$$

En divisant E_{10} par $\{O, R_1\}$, on trouve E_{11}, et en la divisant par $\{O, R_2\}$ on trouve E_{10}. Enfin en la divisant par $\{O, R_3\}$, on obtient :

$$E_{12}:\ y^2 - 2txy - \frac{1}{2}st^2y = x^3 + \frac{1}{4}stx^2 + a_4x + a_6,$$

avec :

$$a_4 = -\frac{5}{16}st^2(17s - 16t), \quad a_6 = \frac{1}{64}st^3(275s^2 - 544st + 256t^2).$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{12} = 2^8st^{10}(s - t).$$

En utilisant le théorème d'isomorphisme (voir [14]), on a :

$$E_9 \simeq E_6^{(-t)},\ E_{10} \simeq E_3^{(-t)}\ E_{11} \simeq E_4^{(-t)},\ E_{12} \simeq E_5^{(-t)}.$$

Les grands rapports de Szpiro des courbes E_9, E_{10}, E_{11} et E_{12} peuvent donc être obtenus à partir de ceux de E_3, E_4, E_5 et E_6 de la table 3 par des tordues par $-t$.

4.2 Supposons maintenant que $4x^2 + C^2x - C^3B$ a deux racines rationnelles. On pose alors $C(C + 16B) = s^2$, $C = t$ et donc $BC = (s^2 - t^2)/16$. Après réduction, la courbe (4) devient :

$$E_{13}:\ y^2 + 4txy - 4t(s^2 - t^2)y = x^3 - (s^2 - t^2)x^2,$$

et admet pour discriminant

$$\Delta_{13} = 2^8 s^2 t^2 (s-t)^4 (s+t)^4.$$

Les points de 2-torsion de E_{13} sont :

$$P_1 = 2P_0,\ P_2 = \left(-2t(s+t), 2t(s+t)^2\right),\ P_3 = \left(2t(s-t), 2t(s-t)^2\right).$$

En divisant E_{13} par le sous-groupe $\{O, P_1\}$ et en réduisant l'équation, on trouve :

$$E_{14} : y^2 + 2txy - \frac{1}{2}t(s^2-t^2)y = x^3 - \frac{1}{4}(s^2-t^2)x^2 + a_4 x + a_6,$$

avec :

$$a_4 = -\frac{5}{16}(s^2-t^2)^2, \quad a_6 = -\frac{1}{64}(3s^2+13t^2)(s^2-t^2)^2.$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{14} = 2^4 s^4 t^4 (s-t)^2 (s+t)^2.$$

En divisant E_{13} par $\{O, P_2\}$, on trouve la courbe :

$$E_{15} :\ y^2 + 4txy - 4t(s^2-t^2)y = x^3 - (s^2-t^2)x^2 + a_4 x + a_6,$$

avec :

$$a_4 = -20st(s+t)^2, \quad a_6 = 8st(s+t)^2(2s^2+7st-3t^2).$$

Le discriminant est :

$$\Delta_{15} = 2^{10} st(s+t)^2(s-t)^8.$$

Si on divise E_{13} par $\{O, P_3\}$, on retrouve les expressions de E_{15} et Δ_{15} en remplaçant t par $-t$.

Les points d'ordre 4 de E_{13} sont :

$$\begin{aligned}
&P_0, \quad P_4 = 3P_0,\\
&P_5 = \left(2(s^2-t^2), -2(s-t)(s+t)^2\right),\\
&P_6 = \left(2(s^2-t^2), 2(s+t)(s-t)^2\right).
\end{aligned}$$

En divisant E_{13} par le sous-groupe $\{O, P_0, 2P_0, 3P_0\}$ engendré par P_0, on trouve la courbe :

$$E_{16} : y^2 + 2txy - \frac{1}{2}t(s^2-t^2)y = x^3 - \frac{1}{4}(s^2-t^2)x^2 + a_4 x + a_6,$$

avec :

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\frac{5}{16}(s^2-t^2)(s^2-17t^2),\\
a_6 &= -\frac{1}{64}(s^2-t^2)(3s^4+186s^2t^2-445t^4).
\end{aligned}$$

le discriminant de E_{16} est :

$$\Delta_{16} = -2^8 s^8 t^2 (s-t)(s+t).$$

En divisant E_{13} par le sous-groupe $\{O, P_1, P_5, P_6\}$, on retrouve E_{16} et Δ_{16} en permutant s et t.

Pour les courbes E_{13}, E_{14}, E_{15} et E_{16}, on doit déterminer des entiers s et t pour lesquels le rapport :

$$\frac{\log |st(s-t)(s+t)|}{\log \operatorname{rad}(st(s-t)(s+t))},$$

est assez grand, où $\operatorname{rad}(st(s-t)(s+t))$ désigne le produit des facteurs premiers de $st(s-t)(s+t)$. Il suffit alors de les prendre parmi les membres de l'égalité (8).

La table 7 a été obtenue en prenant dans l'équation (8) $n = 1, 2$, $1 \leq a \leq |b| \leq 300$ et $M = p^k$ où p est un nombre premier vérifiant $2 \leq p \leq 200$ et $p^k \leq 2^{30}$.

Table 7

E	s	t	$\lvert T(E)\rvert$	σ
E_{16}	5^{12}	$7^2.151.181^2$	2	7.965053
E_{16}	$7^2.151.181^2$	5^{12}	2	7.963530
E_{16}	13.23^3	$5^5.7^2$	2	7.952616
E_{16}	$5^5.7^2$	13.23^3	2	7.941410
E_{16}	13^3	3^7	2	7.794789
E_{16}	$13^6.103$	17^7	2	7.793004
E_{16}	3^7	13^3	2	7.792275
E_{16}	17^7	$13^6.103$	2	7.754977
E_{14}	5^{12}	$7^2.151.181^2$	4	7.715522
E_{15}	$3^4.10753$	$2^{23}.29$	4	7.691453

En prenant des tordues quadratiques de certaines courbes dans la table 7, on obtient la table 8.

Table 8

E	s	t	d	$\lvert T(E^{(d)})\rvert$	$\sigma^{(d)}$
E_{16}	5^{12}	$7^2.151.181^2$	-3	2	7.891402
E_{16}	$7^2.151.181^2$	5^{12}	-3	2	7.889937
E_{16}	5^{12}	$7^2.151.181^2$	5	2	7.859005
E_{16}	$7^2.151.181^2$	5^{12}	5	2	7.857564
E_{16}	5^{12}	$7^2.151.181^2$	-7	2	7.838265
E_{16}	$7^2.151.181^2$	5^{12}	-7	2	7.836840

7. Points de 5-torsion

Pour avoir $5P = 0$ sur la courbe (4), il faut $\Psi_5(0,0) = 0$, et donc $A = B$. On pose $s = C$ et $t = A = B$. L'équation (4) donne alors :

$$E_{17}:\ y^2 + (s-t)xy - s^2ty = x^3 - stx^2,$$

de discriminant

$$\Delta_{17} = -s^5t^5(s^2 + 11st - t^2).$$

En divisant E_{17} par le groupe engendré par P_0, on trouve la courbe :

$$E_{18}:\ y^2 + (s-t)xy - s^2ty = x^3 - stx^2 + a_4x + a_6,$$

avec :

$$a_4 = 5st(s^2 - 2st - t^2), \quad a_6 = st(s^4 - 15s^3t + 5s^2t^2 - 10st^3 - t^4).$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{18} = -st(s^2 + 11st - t^2)^5.$$

Pour les courbes E_{17} et E_{18}, on peut prendre s et t parmi les solutions de l'équation (9). La table 9 a été obtenue en prenant $M = p_1^{n_1}p_2^{n_2}$, où, pour $i = 1, 2$, p_i est un nombre premier vérifiant $2 \le p_i \le 1000$ et $p_i^{n_i} \le 2^{40}$.

Table 9

E	s	t	$\lvert T(E)\rvert$	σ
E_{18}	$2^9.7^2.163$	$5^3.11^3$	1	8.243171
E_{18}	$3^2.7^5.11.13^2$	-1031	1	8.074657
E_{18}	$3^7.5^4.1831$	$2^{10}.30139$	1	8.070883
E_{18}	$2^{11}.5.11$	$-3^4.7$	1	7.957738
E_{18}	$2^{11}.3.89^3$	-41	1	7.829967
E_{18}	$3^{12}.163^2$	$2^4.3435889$	1	7.827141
E_{18}	$13^3.29$	$3.7.47$	1	7.821050
E_{18}	$5.29^3.6529$	$2^{11}.7.11.1103$	1	7.783123
E_{17}	$2^9.7^2.163$	$5^3.11^3$	5	7.593892
E_{17}	$3^7.5^4.1831$	$2^{10}.30139$	5	7.500378

En prenant des tordues quadratiques de certaines courbes dans la table 9, on obtient la table 10.

Table 10

E	s	t	d	$\lvert T(E^{(d)})\rvert$	$\sigma^{(d)}$
E_{18}	$2^9.7^2.163$	$5^3.11^3$	5	1	8.090239
E_{18}	$2^9.7^2.163$	$5^3.11^3$	-7	1	8.060865
E_{18}	$2^9.7^2.163$	$5^3.11^3$	-11	1	8.022682
E_{18}	$3^7.5^4.1831$	$2^{10}.30139$	-3	1	8.001538
E_{18}	$3^2.7^5.11.13^2$	-1031	-3	1	7.994573
E_{18}	$3^7.5^4.1831$	$2^{10}.30139$	5	1	7.970852

8. Points de 6-torsion

Pour avoir $6P = 0$ sur la courbe (4), il faut $\Psi_6(0,0) = 0$, et donc que A, B et C vérifient $A \neq B$ et $A^2 - BC + AC = 0$. En éliminant C et en effectuant le changement de variables $(x,y) = (A^2(A-B)^2 x, A^3(B-A)^3 y)$, la courbe (4) devient :

$$E:\; y^2 + (2A-B)xy + AB(A-B)y = x^3 + B(A-B)x^2. \tag{13}$$

On a alors :

$$\Psi_2^2(x,y) = (x + A(A-B))\left(4x^2 + B(4A-3B)x + AB^2(A-B)\right).$$

8.1 Supposons que le polynôme $4x^2 + B(4A-3B)x + AB^2(A-B)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. En posant $s = A$ et $t = B$ la courbe (13) devient :

$$E_{19}:\; y^2 + (2s-t)xy + st(s-t)y = x^3 + t(s-t)x^2,$$

avec pour discriminant

$$\Delta_{19} = -s^2t^3(s-t)^6(8s-9t).$$

Le point $P_1 = 3P_0$ est l'unique point de 2-torsion de E_{19}. En divisant E_{19} par le sous groupe $\{O, P_1\}$, on obtient la courbe :

$$E_{20}:\; y^2 + (2s-t)xy + st(s-t)y = x^3 + t(s-t)x^2 + a_4x + a_6,$$

avec :

$$a_4 = -5s(s-t)^3, \quad a_6 = s(s-t)^3(3s^2 - 7st + 3t^2).$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{20} = st^6(s-t)^3(8s-9t)^2.$$

Les points $P_2 = 2P_0$ et $P_3 = 4P_0$ sont des points de torsion d'ordre 3 sur E_{19}. En divisant E_{19} par le sous-groupe $\{O, P_2, P_3\}$ on obtient la courbe :

$$E_{21}:\; y^2 + (2s-t)xy + st(s-t)y = x^3 + t(s-t)x^2 + a_4x + a_6,$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= 5t(s-t)^2(2s-3t),\\ a_6 &= t(s-t)^2(8s^3 - 33s^2t + 43st^2 - 19t^3). \end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{21} = -s^6t(s-t)^2(8s-9t)^3.$$

En divisant E_{19} par le sous-groupe engendré par P_0, on obtient :

$$E_{22}:\; y^2 + (2s-t)xy + st(s-t)y = x^3 + t(s-t)x^2 + a_4x + a_6,$$

avec :

$$\begin{aligned}a_4 &= -5(s-t)(s^3-2s^2t+5st^2-3t^3),\\ a_6 &= (s-t)(3s^5-13s^4t-24s^3t^2+76s^2t^3-62st^4+19t^5).\end{aligned}$$

Le discriminant de E_{22} est alors :

$$\Delta_{22} = s^3t^2(s-t)(8s-9t)^6.$$

Pour s et t entiers, on a :

$$\begin{aligned}E_{19}(s,t) &\simeq E_7(2s-3t,-t(s-t)^2), & E_{20}(s,t) &\simeq E_7(4s-3t,t^2(s-t)),\\ E_{21}(s,t) &\simeq E_8(2s-3t,-t(s-t)^2), & E_{22}(s,t) &\simeq E_8(4s-3t,t^2(s-t)).\end{aligned}$$

Ces relations permettent de déterminer des courbes de la forme E_{19}, E_{20}, E_{21} ou E_{22}, ayant un grand rapport de Szpiro, à partir des courbes de la table 5.

8.2. Supposons maintenant que $4x^2+B(4A-3B)x+AB^2(A-B)$ a deux racines rationnelles. On pose alors $-B(8A-9B)=s^2$ et $B=t$. En éliminant A, et après réduction, la courbe (13) devient :

$$E_{23}:\ y^2-(s^2-5t^2)xy+t^2(s^2-t^2)(s^2-9t^2)y = x^3-2t^2(s^2-t^2)x^2,$$

et a pour discriminant

$$\Delta_{23} = s^2t^6(s-t)^6(s+t)^6(s+3t)^2(s-3t)^2.$$

Les trois points de 2-torsion de E_{23} sont $P_1=3P_0$, P_2 et P_3 donnés par :

$$\begin{aligned}P_2 &= \left(t^2(s+t)(s-3t),-t^3(s+t)^2(s-3t)\right),\\ P_3 &= \left(t^2(s-t)(s+3t),t^3(s-t)^2(s+3t)\right).\end{aligned}$$

En divisant E_{23} par le sous-groupe $\{O,P_1\}$, on trouve :

$$\begin{aligned}E_{24}:\ y^2-\frac{1}{2}(s^2-5t^2)xy+\frac{1}{8}t^2(s^2-t^2)(s^2-9t^2)y&\\ = x^3-\frac{1}{2}t^2(s^2-t^2)x^2+a_4x+a_6&,\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}a_4 &= -\frac{5}{256}(s^2-t^2)^3(s^2-9t^2),\\ a_6 &= \frac{1}{4096}(s^2-t^2)^3(s^2-9t^2)(3s^4+2s^2t^2-69t^4).\end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{24} = s^4t^{12}(s-t)^3(s+t)^3(s+3t)(s-3t).$$

En divisant E_{23} par le sous-groupe $\{O, P_2\}$, on trouve :

$$\begin{aligned} E_{25}:\ y^2-(s^2-5t^2)xy+&t^2(s^2-t^2)(s^2-9t^2)y \\ &= x^3-2t^2(s^2-t^2)x^2+a_4x+a_6, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= 5st^3(s+t)^3(s-3t), \\ a_6 &= st^3(s+t)^3(s-3t)(s^4-11s^2t^2-14st^3+12t^4). \end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{25} = -st^3(s-t)^{12}(s+t)^3(s+3t)^4(s-3t).$$

En divisant E_{23} par le sous-groupe $\{O, P_3\}$, on retrouve E_{25} et Δ_{25} en remplaçant t par $-t$.

Les points de 3-torsion de E_{23} sont $P_4 = 2P_0$ et $P_5 = 4P_0 = -P_4$. En divisant E_{23} par le sous-groupe $\{O, P_4, P_5\}$, on trouve :

$$E_{26}:\ y^2-(s^2-5t^2)xy+t^2(s^2-t^2)(s^2-9t^2)y = x^3-2t^2(s^2-t^2)x^2+a_4x+a_6,$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= -5t^2(s^2-t^2)^2(s^2+3t^2), \\ a_6 &= -t^2(s^2-t^2)^2(s^6+6s^4t^2-7s^2t^4+64t^6). \end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{26} = s^6t^2(s-t)^2(s+t)^2(s+3t)^6(s-3t)^6.$$

En divisant E_{23} par le sous-groupe engendré par P_0, on trouve :

$$\begin{aligned} E_{27}:\ y^2-\frac{1}{2}(s^2-5t^2)xy+&\frac{1}{8}t^2(s^2-t^2)(s^2-9t^2)y \\ &= x^3-\frac{1}{2}t^2(s^2-t^2)x^2+a_4x+a_6, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{5}{256}(s^2-t^2)(s^6-11s^4t^2+275s^2t^4-777t^6), \\ a_6 &= \frac{1}{4096}(s^2-t^2)\Big(3s^{10}-31s^8t^2-2850s^6t^4+31234s^4t^6 \\ &\qquad -131633s^2t^8+136045t^{10}\Big). \end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{27} = s^{12}t^4(s-t)(s+t)(s+3t)^3(s-3t)^3.$$

En divisant E_{23} par le sous-groupe engendré par $2P_0$ et P_2, on trouve :

$$\begin{aligned} E_{28}:\ y^2-(s^2-5t^2)xy+&t^2(s^2-t^2)(s^2-9t^2)y \\ &= x^3-2t^2(s^2-t^2)x^2+a_4x+a_6, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= 5t(s+t)(s^6-10s^5t+28s^4t^2-29s^3t^3+2s^2t^4+3st^5-3t^6), \\ a_6 &= t(s+t)\Big(s^{10}-24s^9t+157s^8t^2-437s^7t^3+462s^6t^4-50s^5t^5 \\ &\qquad -67s^4t^6-17s^3t^7+71s^2t^8+64st^9-64t^{10}\Big). \end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{28} = -s^3t(s-t)^4(s+t)(s+3t)^{12}(s-3t)^3.$$

En divisant E_{23} par le sous-groupe engendré par $2P_0$ et P_3, on retrouve E_{28} et Δ_{28} en remplaçant t par $-t$.

Pour les courbes E_{23} à E_{28}, on peut prendre s et t parmi les membres de (8). La table 11 a été obtenue en prenant $n=1$, $1\le a\le |b|\le 300$ et $M=p^k$ avec p premier, vérifant $2\le p\le 300$ et $p^k\le 2^{32}$.

Table 11

E	s	t	$\lvert T(E)\rvert$	σ
E_{28}	7	-3^5	2	7.806270
E_{28}	7^6	-37	2	7.624470
E_{25}	7	-3^5	1	7.569888
E_{28}	3.59	$-2^3.23$	2	7.466010
E_{28}	7^2	$2^8.19$	2	7.431017
E_{28}	-7^2	$2^8.19$	2	7.431017
E_{28}	19.101^2	$2^6.557$	2	7.415144
E_{26}	7^6	-37	4	7.384042
E_{28}	7^6	37	2	7.376711
E_{25}	$2^8.3.19$	7^2	6	7.376579

En prenant des tordues quadratiques de certaines courbes dans la table 11, on obtient la table 12.

Table 12

E	s	t	d	$\lvert T(E^{(d)})\rvert$	$\sigma^{(d)}$
E_{28}	7	-3^5	-3	6	7.686752
E_{28}	7	-3^5	5	2	7.636405
E_{28}	7	-3^5	-7	2	7.604852
E_{28}	7^6	-37	-3	6	7.572905
E_{28}	7^6	-37	5	2	7.550027
E_{28}	7	-3^5	-15	2	7.537694

9. Points de 7-torsion

Si $7P_0 = O$ sur la courbe (4), alors $\Psi_7(0,0) = 0$, et donc A ,B et C vérifient $A^3 = BC(B - A)$. Ainsi $(A/C, B/C)$ est un point rationnel sur la courbe singulière $Y^2 - XY = X^3$. En posant $Y = Xs/t$ avec s et t entiers, on trouve $X = s(s-t)/t^2$, $Y = s^2(s-t)/t^3$ et on peut donc prendre $A = st(s-t)$, $B = s^2(s-t)$ et $C = t^3$. Alors (4) devient :

$$E_{29} : \ y^2 - (s^2 - st - t^2)xy - s^2t^3(s-t)y = x^3 - s^2t(s-t)x^2,$$

et a pour discriminant

$$\Delta_{29} = s^7t^7(s-t)^7(s^3 - 8s^2t + 5st^2 + t^3).$$

En divisant E_{29} par le sous-groupe engendré par P_0, on obtient :

$$E_{30} : \ y^2 - (s^2 - st - t^2)xy - s^2t^3(s-t)y = x^3 - s^2t(s-t)x^2 + a_4x + a_6,$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= -5st(s-t)(s^2 - st + t^2)(s^3 + 2s^2t - 5st^2 + t^3), \\ a_6 &= -st(s-t)\Big(s^9 + 9s^8t - 37s^7t^2 + 70s^6t^3 - 132s^5t^4 \\ &\qquad\qquad + 211s^4t^5 - 182s^3t^6 + 76s^2t^7 - 18st^8 + t^9\Big). \end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{30} = st(s-t)(s^3 - 8s^2t + 5st^2 + t^3)^7.$$

On peut prendre alors s et t parmi les membres de (8) ou parmi les solutions de (10).

La table 13 a été obtenue en utilisant les bons exemples pour la conjecture abc [12] et en prenant dans l'équation (10) $M = p^k$, où p est premier vérifiant $2 \leq p \leq 600$ et $p^k \leq 2^{40}$.

Table 13

E	s	t	$\lvert T(E)\rvert$	σ
E_{30}	11	9	1	8.757316
E_{30}	2.3^5	-1	1	7.444604
E_{29}	$2^{15}.13$	$31^2.59$	7	7.362457
E_{30}	$2^4.19$	283	1	7.327803
E_{30}	$2^4.139^2$	$5^2.23^3$	1	7.308972
E_{30}	53^3	$2^4.3^2.13.79$	1	7.231768
E_{30}	5^4	$2^5.17$	1	7.205254
E_{30}	$17^2.229$	29^2	1	7.169130
E_{30}	$2^{15}.13$	$31^2.59$	1	7.138013
E_{30}	11423	$3^3.349$	1	7.114253

En prenant des tordues quadratiques des courbes de la table 13, on obtient la table 14.

Table 14					
E	s	t	d	$\lvert T(E^{(d)})\rvert$	$\sigma^{(d)}$
E_{30}	11	9	-3	1	8.371586
E_{30}	11	9	-11	1	8.034917
E_{30}	11	9	13	1	7.998441
E_{30}	11	9	33	1	7.816835
E_{30}	11	9	-39	1	7.787702
E_{30}	11	9	-1	1	7.637494

10. Points de 8-torsion

Pour avoir $8P_0 = O$ sur la courbe (4), il faut $\Psi_8(0,0) = 0$, et donc A, B et C vérifient $A^2B - A^2C + 3ABC - 2B^2C = 0$. Alors $(A/C, B/C)$ est une solution de l'équation $X^2Y - X^2 + 3XY - 2Y^2 = 0$. On pose $Y = Xs/t$ avec s et t entiers. On obtient

$$X = \frac{(2s-t)(s-t)}{st}, \quad Y = \frac{(2s-t)(s-t)}{t^2},$$

ce qui permet de prendre $A = t(2s-t)(s-t)$, $B = s(2s-t)(s-t)$ et $C = st^2$. Après réduction, l'équation (4) devient :

$$E_{31} : \; y^2 - (2s^2 - 4st + t^2)xy - s^3t(s-t)(2s-t)y = x^3 - s^2(s-t)(2s-t)x^2,$$

et a pour discriminant

$$\Delta_{31} = s^8t^2(s-t)^8(2s-t)^4(8s^2 - 8st + t^2).$$

On ne considère dans cette partie que le cas général où $\Psi_2(x,y)$ n'admet pas obligatoirement trois racines rationnelles. En divisant E_{31} par le sous-groupe $\{O, 4P_0\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_{32} : \; y^2 - (2s^2 - 4st + t^2)xy &- s^3t(s-t)(2s-t)y \\ &= x^3 - s^2(s-t)(2s-t)x^2 + a_4x + a_6, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= -5s^4(s-t)^4, \\ a_6 &= -s^4(s-t)^4(3s^4 - 11s^3t + 16s^2t^2 - 8st^3 + t^4). \end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{32} = s^4t^4(s-t)^4(2s-t)^8(8s^2 - 8st + t^2)^2.$$

En divisant E_{31} par le sous-groupe engendré par $2P_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_{33} :\ y^2 - (2s^2 - 4st + t^2)xy - s^3t(s-t)(2s-t)y \\ = x^3 - s^2(s-t)(2s-t)x^2 + a_4x + a_6, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= -5s^2(s-t)^2(17s^4 - 34s^3t + 25s^2t^2 - 8st^3 + t^4), \\ a_6 &= -s^2(s-t)^2\Big(275s^8 - 1185s^7t + 2177s^6t^2 - 2211s^5t^3 + 1354s^4t^4 \\ &\qquad - 513s^3t^5 + 119s^2t^6 - 16st^7 + t^8\Big). \end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{33} = s^2t^8(s-t)^2(2s-t)^4(8s^2 - 8st + t^2)^4.$$

En divisant E_{31} par le sous-groupe engendré par P_0, on obtient :

$$\begin{aligned} E_{34} :\ y^2 - (2s^2 - 4st + t^2)xy - s^3t(s-t)(2s-t)y \\ = x^3 - s^2(s-t)(2s-t)x^2 + a_4x + a_6, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= -5s(s-t)(17s^6 - 51s^5t + 59s^4t^2 - 33s^3t^3 + 5s^2t^4 + 3st^5 - t^6), \\ a_6 &= -s(s-t)\Big(275s^{10} - 1460s^9t + 3362s^8t^2 - 4388s^7t^3 + 3721s^6t^4 \\ &\qquad - 2315s^5t^5 + 1123s^4t^6 - 392s^3t^7 + 77s^2t^8 - 3st^9 - t^{10}\Big). \end{aligned}$$

Le discriminant est :

$$\Delta_{34} = st^4(s-t)(2s-t)^2(8s^2 - 8st + t^2)^8.$$

La courbe E_{32} admet 3 points de 2-torsion :

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(s^2(s-t)(3s-2t), s^2(s-t)^3(3s-t)\right), \\ R_2 &= \Big(-\frac{1}{4}(4s^4 - 12s^3t + 16s^2t^2 - 8st^3 + t^4), \\ &\qquad -\frac{1}{8}(8s^6 - 48s^5t + 96s^4t^2 - 96s^3t^3 + 50s^2t^4 - 12st^5 + t^6)\Big), \\ R_3 &= \left(-s^2(s-t)(s-2t), -s^2(s-t)^2(s^2 - 4st + t^2)\right), \end{aligned}$$

En divisant E_{32} par $\{O, R_1\}$ on retrouve E_{33} et en la divisant par $\{O, R_2\}$ on retrouve E_{31}. Enfin en divisant E_{32} par $\{O, R_3\}$, on trouve :

$$\begin{aligned} E_{35} :\ y^2 - (2s^2 - 4st + t^2)xy - s^3t(s-t)(2s-t)y \\ = x^3 - s^2(s-t)(2s-t)x^2 + a_4x + a_6, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
a_4 &= -5s^2(s-t)^2(s^4-2s^3t-7s^2t^2+8st^3-t^4),\\
a_6 &= -s^2(s-t)^2\Big(3s^8-17s^7t+129s^6t^2-275s^5t^3+164s^4t^4\\
&\qquad\qquad +53s^3t^5-73s^2t^6+16st^7-t^8\Big).
\end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{35} = -s^2t^2(s-t)^2(2s-t)^{16}(8s^2-8st+t^2).$$

On peut procéder de la même façon en utilisant les trois points de 2-torsion de E_{33}. Mais seul le point

$$\begin{aligned}
R_4 = \Big(&s(s-t)(11s^2-10st+2t^2),\\
&\qquad s(s-t)(11s^4-31s^3t+27s^2t^2-9st^3+t^4)\Big),
\end{aligned}$$

sert à déterminer une nouvelle courbe elliptique. En divisant E_{33} par $\{O, R_4\}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
E_{36}:\ y^2-(2s^2-4st+t^2)xy&-s^3t(s-t)(2s-t)y\\
&= x^3-s^2(s-t)(2s-t)x^2+a_4x+a_6,
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
a_4 &= -5s(s-t)(273s^6-819s^5t+955s^4t^2-545s^3t^3\\
&\qquad +157s^2t^4-21st^5+t^6),\\
a_6 &= -s(s-t)\Big(18963s^{10}-96180s^9t+210338s^8t^2-259492s^7t^3\\
&\qquad +198433s^6t^4-97355s^5t^5+30685s^4t^6-6054s^3t^7\\
&\qquad +705s^2t^8-43st^9+t^{10}\Big).
\end{aligned}$$

Le discriminant est alors :

$$\Delta_{36} = st^{16}(s-t)(2s-t)^2(8s^2-8st+t^2)^2.$$

Comme les expressions $s-t$, $2s-t$ et $8s^2-8st+t^2$ apparaissent dans les discriminants $\Delta_{31}, \cdots, \Delta_{36}$, on peut prendre s et t parmi les membres de (8) ou parmi les solutions de (11).

La table 15 a été obtenue en utilisant les exemples de [12] d'une part, et en prenant dans l'équation (11) $M = p^k$, où p est premier vérifiant $2 \le p \le 1000$ et $p^k \le 2^{30}$.

Table 15				
E	s	t	$\|T(E)\|$	σ
E_{34}	2^3	-22619	2	7.431643
E_{36}	2^3	-22619	2	7.431101
E_{35}	31^2	3^8	4	7.416867
E_{36}	2^{10}	$3^5.11$	2	7.397627
E_{34}	2^{10}	$3^5.11$	2	7.369815
E_{36}	$2^{11}.3$	113^2	2	7.359048
E_{34}	$2^{11}.3$	113^2	2	7.358475
E_{36}	2^8	3.23^2	2	7.354622
E_{36}	31^2	3^8	2	7.342342
E_{34}	311	-2.5^5	2	7.288486

En prenant des tordues quadratiques des courbes de la table 15, on obtient la table 16.

Table 16					
E	s	t	d	$\|T(E^{(d)})\|$	$\sigma^{(d)}$
E_{34}	2^3	-22619	-3	2	7.383118
E_{36}	2^3	-22619	-3	2	7.382594
E_{34}	2^3	-22619	5	2	7.361658
E_{36}	2^3	-22619	5	2	7.361143
E_{35}	31^2	3^8	-3	2	7.359289
E_{36}	2^{10}	$3^5.11$	-3	2	7.338752

11. Autres cas

Une étude similaire pour les courbes elliptiques ayant un point de torsion $m \in \{9, 10, 12\}$ n'a pas donné de résultats probant pour le rapport de Szpiro, et ne sera donc pas développée. Ceci est dû au grand nombre de facteurs sans grands exposants dans l'expression du déterminant. A titre d'exemple, soit

$$E_0 : \ y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2,$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= -(s^4 + 2s^3t + 2s^2t^2 + 2st^3 - t^4), \\ a_2 &= -st^2(s+t)(s^2+t^2)(s^2+st+t^2), \\ a_3 &= st^5(s+t)(s-t)(s^2+t^2)(s^2+st+t^2). \end{aligned}$$

Alors $P_0 = (0, 0)$ est un point de torsion d'ordre 12 sur E_0, mais le discriminant

$$\Delta_0 = s^{12}t^{12}(s+t)^6(s-t)^2(t^2+s^2)^3(s^2+st+t^2)^4(s^2+4st+t^2),$$

admet plusieurs facteurs, ce qui augmente les contraintes dans la recherche d'un rapport de Szpiro assez grand.

References

1. M. Ayad, *Points S-entiers des courbes elliptiques*, Manuscr. Math. **76** (1992), 305–324.
2. C. Batut, D. Bernardi, H. Cohen, M. Olivier, *PARI-GP*, a computer system for number theory, Version 1.39, `ftp://megrez.ceremab.u-bordeaux.fr/pub/pari/`.
3. H. Cohen, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, Graduate Texts in Math., vol. 138, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
4. I. Connell, *APECS*, Version 3.7, 1996, `ftp://math.mcgill.ca/pub/apecs/`.
5. J. Cremona, *Algorithms for Modular Elliptic Curves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
6. E. Fouvry, M. Nair et G. Tenenbaum, *L'ensemble exceptionnel dans la conjeture de Szpiro*, Bull. Soc. Math. France **120** (1992), 485–506.
7. M. Hindry and J.H. Silverman, *The canonical height and integral points on elliptic curves*, Invent. Math. **93** (1988), 419–450.
8. D. Husemöller, *Elliptic Curves*, Graduate Texts in Math., vol. 111, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986.
9. D.S. Kubert, *Universal bounds on the torsion of elliptic curves*, Proc. London Math. Soc. **33** (1976), 193–237.
10. T. Nagell, *Recherches sur l'arithmétique des cubiques planes du premier genre dans un domaine de rationalité quelconque*, Nova Acta Soc. Sci. Upsal, Ser. IV 15, **6** (1952), 1–66.
11. A. Nitaj, *Algorithms for finding good examples for the abc and Szpiro conjectures*, Experimental Math. **3** (1993), 223–230.
12. ———, *Tables of good abc-examples*, preprint (1997), Saarbrücken.
13. J. Oesterlé, *Nouvelles approches du "théorème" de Fermat*, Séminaire Bourbaki 1987 – 88, no. 694, Astérisque **161-162** (1988), 165–186.
14. J.H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Math., vol. 106, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1986.
15. *SIMATH*, a computer algebra system, Version 3.10.3, Simath-Gruppe, Saarbrüken, 1996, `ftp://ftp.math.uni-sb.de:/pub/simath`.
16. L. Szpiro, *Propriétés numériques du faisceau dualisant relatif, in Pinceaux de Courbes de Genre au Moins Deux*, Astérisque **86** (1981), 44–78.
17. ———, *Discriminant et conducteur, in Seminaire sur les Pinceaux de Courbes Elliptiques*, Astérisque **183** (1990), 7–17.
18. H.M. Tschöpe, H.G. Zimmer, *Computation of the Néron-Tate height on elliptic curves*, Math. Comp. **48** (1987), 351–370.
19. J. Vélu, *Isogénies entre courbes elliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **273** (1971), 238–241.
20. B.M.M. de Weger, *$A + B = C$ and big Sha's*, Quart. J. Math. Ser. (2), to appear.

Fb 9, Mathematik, Universität des Saarlandes, Postfach 15 1150, D-66041, Saarbrücken, Germany

E-mail address: `nitaj@math.uni-sb.de`